SF1624 Algebra och geometri

Tjugoandra föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

3 december, 2009

Diagonalmatriser

Definition

En *diagonalmatris* är en matris på formen

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Det är lätt att räkna med diagonala matriser, eftersom både addition och multiplikation sker komponentvis.

Bas av egenvektorer

Om T är en linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ och vi kan hitta en bas för $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer till T kommer matrisen för T att bli diagonal med avseende på den basen.

Exempel

Om T svarar mot matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ kan vi välja basen $F = \{(1,2)^t, (1,-1)^t\}$ och får matrisen

$$_FA_F = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

När går det att diagonalisera?

Sats

Det går att diagonalisera matrisen A precis om det finns en bas för $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer till A.

Bevis.

Om det finns en sådan bas har vi sett att matrisen relativt den basen blir diagonal.
För en diagonalmatris är standardbasen en bas av egenvektorer. Om $D = P^{-1}AP$ måste kolonnerna i P vara en bas av egenvektorer för A. $\square$

Exempel

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ går inte att diagonalisera.
Karaktäristiska ekvationen är $x^2 = 0$, men inte alla vektorer i $\mathbb{R}^2$ är egenvektorer med egenvärde 0, bara multiplerna av $(2, -1)^t$.

Symmetriska matriser

Definition (Symmetrisk matris)

En matris som uppfylller $A^t = A$ kallas *symmetrisk*.

Sats (Spektralsatsen)

En matris har en ortogonal bas av egenvektorer precis om den är symmetrisk.

Exempel

Med $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ har vi sett att $(1,1)^t$ är en egenvektor med egenvärde 1. Eftersom A är symmetrisk måste också $(1,-1)^t$ som ger det ortogonala komplementet vara en egenvektor.

Ortogonal diagonalisering

- Enligt spektralsatsen kan vi för symmetriska matriser hitta en ortogonal bas av egenvektorer.
- Om vi normerar den får vi en ortonormal bas
- Basbytesmatrisen blir då en ortogonal matris.

Vi säger att symmetriska matriser tillåter ortogonal diagonalisering och vi kan finna en ortogonal matris P så att

$$P^t A P = D$$

där D är en diagonalmatris.

Exempel

Om $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ kan vi skriva $P^t A P = D$ med

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potenser med hjälp av diagonalisering

Sats

Om $P^{-1}AP = D$ kan vi beräkna potenser genom

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Bevis.

$P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$ och

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

$\square$

Exempel

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^n &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & \frac{1}{3^n}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} + 3^{-n}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$